Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent.

Par E. Goursat.

---

1. Dans un Mémoire récent, publié dans l'*American Journal of Mathematics*, Vol. X, No. 2, p. 175, M. Appell a étudié les surfaces telles qu'un point fixe se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux. J'étudie dans ce travail des surfaces jouissant d'une propriété un peu plus générale; la détermination de ces surfaces dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles, qui peut être intégrée sous forme explicite par la méthode de Laplace dans un nombre illimité de cas, dont les plus simples fournissent précisément les surfaces minima et les surfaces étudiées par M. Appell. De chaque surface de cette espèce on peut en déduire une nouvelle par une construction géométrique, qui comprend comme cas particulier la construction donnée par M. Appell.

Je montre en terminant comment on peut ramener à un problème résolu par Riemann la recherche des surfaces de cette nature tangentes à une développable donnée le long d'une courbe donnée.

2. Considérons un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et une sphère S de rayon égal à l'unité ayant pour centre l'origine. Soit Σ une surface non développable, M un point de cette surface, a, b, c les cosinus directeurs d'une direction déterminée MN sur la normale à la surface Σ au point M. Si par l'origine on mène une parallèle à cette direction, cette droite rencontre la sphère en un point bien déterminé m, dont les coordonnées rectangulaires sont a, b, c, qui est dit l'*image sphérique* du point M. A chaque courbe tracée sur Σ correspond ainsi une courbe tracée sur la sphère qui sera appelée *image sphérique* de la première.

Pour représenter la position du point m de la sphère, on exprime les coordonnées a, b, c en fonction de deux paramètres. La sphère S

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

pouvant être considérée comme une surface réglée, on sait que par chaque point passent deux génératrices rectilignes imaginaires. Nous prendrons comme variables indépendantes deux quantités restant constantes respectivement sur les génératrices de chaque système. L'équation de la sphère pouvant s'écrire

$$(a + ib)(a - ib) = (1 + c)(1 - c), \tag{1}$$

nous avons immédiatement les deux systèmes de génératrices

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+ib}{1-c} &= \frac{1+c}{a-ib} = s, \\ \frac{a-ib}{1-c} &= \frac{1+c}{a+ib} = s_0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

s_0 désignant la quantité imaginaire conjuguée de s lorsque a, b, c sont réels. La signification géométrique de ces quantités s, s_0 est bien connue ; si a, b, c sont réels et si on fait la projection stéréographique du point m de la sphère sur le plan des xy, le point de vue étant le point de la sphère situé sur la partie positive de l'axe Oz, la quantité imaginaire s est l'*affixe* de la projection. Des équations (2) on tire inversement

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{s+s_0}{1+ss_0}, \\ b &= i\,\frac{s_0-s}{1+ss_0}, \\ c &= \frac{ss_0-1}{1+ss_0}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L'équation du plan tangent à la surface Σ au point M pourra s'écrire

$$x(s + s_0) + iy(s_0 - s) + z(ss_0 - 1) = u, \tag{4}$$

en posant, pour abréger, $u = (1 + ss_0)\,\delta$, δ désignant la distance de l'origine à ce plan. Si dans cette équation on regarde u comme une fonction donnée de s et de s_0, le plan représenté par cette équation enveloppe une certaine surface et on peut regarder la relation

$$u = \Phi(s, s_0)$$

comme l'équation d'une surface dans le système de variables adopté. Les coordonnées du point de contact M du plan (4) avec la surface Σ sont données par les équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} x+iy &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial s_0}+su-s^2\dfrac{\partial u}{\partial s}}{1+ss_0}, \\ x-iy &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial s}+s_0u-s_0^2\dfrac{\partial u}{\partial s_0}}{1+ss_0}, \\ z &= \frac{s\dfrac{\partial u}{\partial s}+s_0\dfrac{\partial u}{\partial s_0}-u}{1+ss_0}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dans ce système, les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques sont les suivantes :

lignes de courbure :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}ds^2=\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}ds_0^2; \tag{6}$$

lignes asymptotiques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}ds^2+\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}ds_0^2+2dsds_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}+\frac{u-s\dfrac{\partial u}{\partial s}-s_0\dfrac{\partial u}{\partial s_0}}{1+ss_0}\right]=0. \tag{7}$$

Les formules donnant le rayon de courbure principal R' et les coordonnées X', Y', Z' du centre de courbure deviennent :

$$\left.\begin{aligned} 2R' &= -u+s\frac{\partial u}{\partial s}+s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}-(1+ss_0)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}+\sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}}\right], \\ 2Z' &= -u+s\frac{\partial u}{\partial s}+s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}+(1-ss_0)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}+\sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}}\right], \\ X'+Y'i &= \frac{\partial u}{\partial s_0}-s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}+\sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}}\right], \\ X'-iY' &= \frac{\partial u}{\partial s}-s_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}+\sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

On trouvera ces formules dans les *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. G. Darboux, t. I, pages 245–246 ; les variables s, s_0, $-u$ sont appelées par M. Darboux α, β, ξ. Ces formules se trouvent aussi reproduites au début du Mémoire déjà cité de M. Appell.

Etant données plusieurs surfaces Σ, Σ', Σ'', ... considérons les points m, m', m'', ... de ces surfaces où les plans tangents sont parallèles et la résul-

tante géométrique OM des droites om, om', om'', ... Le point M décrit une surface qui est dite la résultante géométrique des surfaces Σ, Σ', Σ'', ... Si u, u', u'', ... sont les fonctions de s et de s_0 qui définissent respectivement les surfaces Σ, Σ', Σ'', ... la fonction U qui fournit la surface résultante sera

$$U = u + u' + u'' + \ldots .$$

La somme des rayons de courbure principaux $R' + R''$ étant une fonction linéaire de u et de ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s_0}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0}$, on voit immédiatement que la somme des rayons de courbure principaux de la surface résultante est égale à la somme des rayons de courbure principaux de toutes les surfaces composantes aux points correspondants. En particulier, si on a comme surfaces composantes une sphère et une surface minima, la surface obtenue, qui sera parallèle à une surface minima, jouira de cette propriété que la somme des rayons de courbure principaux sera constante, et inversement toute surface possédant cette propriété sera parallèle à une surface minima.

3. J'arrive maintenant à l'objet de ce Mémoire, qui est d'étudier les surfaces telles que *la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent.* Supposons que nous ayons pris ce point fixe pour origine. La distance de l'origine au plan tangent est égale, nous l'avons vu, au signe près, à

$$\frac{u}{1 + ss_0};$$

si nous appelons X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du point milieu des centres de courbure principaux, on a

$$X_1 + iY_1 = \frac{\partial u}{\partial s_0} - s\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0},$$

$$X_1 - iY_1 = \frac{\partial u}{\partial s} - s_0\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0},$$

$$Z_1 = \frac{1 - ss_0}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} + \frac{1}{2}\left(s\frac{\partial u}{\partial s} + s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} - u\right),$$

et la distance de ce point au plan tangent est égale, au signe près, à

$$\frac{1}{2}\left[(1 + ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} - s\frac{\partial u}{\partial s} - s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} + u\right],$$

c'est-à-dire à la demi-somme des rayons de courbure principaux, comme il était

évident *a priori*. L'équation différentielle des surfaces cherchées sera par conséquent

$$(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}-s\frac{\partial u}{\partial s}-s_0\frac{\partial u}{\partial s_0}+u\left[1+\frac{2K}{1+ss_0}\right]=0. \quad (9)$$

Il est aisé de voir que la constante K représente le rapport des distances du point milieu des centres de courbure principaux et de l'origine au plan tangent, ce rapport étant pris positivement lorsque l'origine et le point milieu des centres de courbure principaux sont de côtés différents du plan tangent.

Pour $K=0$, l'équation (9) se réduit à l'équation des surfaces minima ; pour $K=-1$, on retrouve l'équation différentielle des surfaces étudiées par M. Appell. Dans ces deux cas, l'intégrale générale de l'équation (9) peut être obtenue sous forme explicite ; on peut l'obtenir en particulier par l'application de la méthode de Laplace. Nous allons voir qu'il existe une infinité de valeurs de K pour lesquelles l'application de cette méthode fournit sous forme explicite l'intégrale générale de l'équation (9).

De la forme linéaire de l'équation (9) on conclut que, si l'on a plusieurs intégrales, leur somme sera aussi une intégrale. En d'autres termes, si on a plusieurs surfaces répondant à la question, leur surface résultante jouira de la même propriété. C'est, comme on voit, l'extension à nos surfaces d'une propriété bien connue des surfaces minima. Il serait d'ailleurs facile de l'établir géométriquement d'après ce qui a été dit plus haut sur les surfaces résultantes.

4. Dans l'équation (9) faisons le changement de variables

$$s=\alpha,\ s_0=-\frac{1}{\beta};$$

on aura

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial \alpha},\ \frac{\partial u}{\partial s_0}=\frac{\partial u}{\partial \beta}\beta^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0}=\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\beta^2,$$

et l'équation devient

$$\beta(\beta-\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}+u\frac{\beta(1+2K)-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Posons ensuite $u=\frac{\xi}{\beta}$; on trouve la nouvelle équation

$$(\alpha-\beta)\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+\frac{2K\xi}{\alpha-\beta}=0; \quad (10)$$

du reste, on obtiendrait immédiatement cette équation en employant le premier système de variables α, β, ξ employé par M. Darboux (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, pages 244–245). Posons encore

$$\xi=(\alpha-\beta)^{\lambda}v;$$

l'équation (10) devient

$$(\alpha-\beta)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}-(\lambda-1)\frac{\partial v}{\partial\alpha}+(\lambda-1)\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{3\lambda-\lambda^2+2K}{\alpha-\beta}v=0.$$

Choisissons pour λ une racine de l'équation

$$\lambda^2-3\lambda-2K=0 \tag{11}$$

et posons $\lambda=1+m$; la nouvelle équation prend la forme très-simple

$$(\alpha-\beta)\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}-m\frac{\partial v}{\partial\alpha}+m\frac{\partial v}{\partial\beta}=0. \tag{12}$$

En réunissant les trois transformations précédentes, on voit qu'on passe de l'équation (9) à l'équation (12) en posant:

$$s=\alpha,\ s_0=-\frac{1}{\beta},\ u=\frac{(\alpha-\beta)^\lambda}{\beta}v, \tag{13}$$

où λ désigne une racine de l'équation (11) et où $\lambda=1+m$; la constante K est donnée en fonction de m par la formule

$$K=\frac{(m+1)(m-2)}{2}. \tag{14}$$

Inversement, si on connaît une intégrale de l'équation (12), les formules (13) permettront d'en déduire une fonction u de s et de s_0 vérifiant l'équation (9). En général cette fonction u ainsi obtenue ne prendra pas de valeurs réelles lorsque les variables s et s_0 prendront des valeurs imaginaires conjuguées et, par conséquent, ne fournira pas une surface réelle. Mais il est facile d'éviter cet inconvénient. Soit, en effet,

$$u=f(s,s_0)$$

une première intégrale de l'équation (9); comme cette équation ne change pas quand on y échange les variables s, s_0 et que tous les coefficients sont réels, la fonction $f_0(s_0,s)$, où f_0 désigne la fonction conjuguée de f, sera aussi une intégrale de la même équation. Il en sera encore de même de la somme

$$f(s,s_0)+f_0(s_0,s),$$

et il est clair que cette dernière fonction est réelle lorsque s et s_0 prennent des valeurs imaginaires conjuguées.

5. L'équation (12), à laquelle nous sommes conduits, s'est déjà présentée, sous des formes un peu différentes, dans un grand nombre de recherches d'Analyse ou de Physique Mathématique. Etudiée d'abord par Euler dans le tome III de

son *Calcul intégral*, puis généralisée par Laplace,* elle a été l'objet de travaux très importants de Poisson,† de Riemann,‡ et plus récemment de M. Darboux,§ qui l'a étudiée en détail, ainsi qu'une équation plus générale, dans ses leçons de la Faculté des Sciences de Paris pendant le semestre d'hiver 1887–1888. Je ne me servirai ici que des propriétés les plus simples de cette équation, en indiquant comment on peut les établir.

Lorsque m est quelconque, on ne peut pas obtenir pour l'intégrale générale de l'équation (12) une formule générale où figurent explicitement les fonctions arbitraires et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé; dans le Mémoire déjà cité, Poisson a donné une forme générale de l'intégrale qui contient deux fonctions arbitraires sous des signes d'intégration définie. Mais on peut toujours obtenir, quelle que soit la constante m, une infinité d'intégrales particulières. Ainsi, en cherchant les solutions de l'équation (12) qui sont homogènes en β et α, on est conduit à l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfait la série hypergéométrique, et on trouve ainsi que les fonctions

$$\left.\begin{aligned} v &= \alpha^{\mu} F\left(-\mu,\ m,\ 1-m-\mu,\ \frac{\beta}{\alpha}\right), \\ v &= \alpha^{-m}\beta^{m+\mu} F\left(m,\ 2m+\mu,\ 1+m+\mu,\ \frac{\beta}{\alpha}\right), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où F désigne la série hypergéométrique de Gauss, vérifient, pour toute valeur de μ, l'équation (12). Pour avoir des solutions entières, il suffira de prendre pour μ un nombre entier positif. De même, en cherchant si l'équation (12) admet des intégrales qui soient le produit d'une fonction de α par une fonction de β, on trouve que la fonction

$$v = (\alpha - h)^{-m}(\beta - h)^{-m} \tag{16}$$

satisfait, pour toute valeur de h, à l'équation (12). Enfin on vérifie sans difficulté que, si $\phi(\alpha, \beta)$ est une intégrale, il en sera encore de même de la fonction

$$(a\alpha + b)^{-m}(a\beta + b)^{-m}\phi\left(\frac{c\alpha + d}{a\alpha + b},\ \frac{c\beta + d}{a\beta + d}\right), \tag{17}$$

---

* *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles*, par M. DE LA PLACE. *Mémoires de Mathématique et de Physique de l'Académie des Sciences pour* 1773, p. 341–403.

† POISSON, *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.* (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, t. XII, XIXème Cahier, p. 215; 1823.)

‡ RIEMANN, *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.* (*Gesammelte Werke*, p. 145.)

§ DARBOUX, *Sur une équation lineaire aux dérivées partielles.* (*Comptes rendus*, t. XCV, p. 69; juillet 1880.)

quelles que soient les constantes a, b, c, d. On voit donc qu'on pourra toujours obtenir une infinité de surfaces réelles répondant à la question, quelle que soit la valeur de la constante K, et même de surfaces algébriques pourvu que la valeur de λ fournie par l'équation (11) soit commensurable.

Pour abréger je désignerai dans la suite par $E(m)$ l'équation (12) et par Σ_m une quelconque de nos surfaces correspondant à cette valeur de m. Comme à chaque valeur de K l'équation (14) fait correspondre deux valeurs de m dont la somme est égale à l'unité, on voit que les surfaces Σ_m et Σ_{1-m} sont identiques. D'ailleurs on passe immédiatement de l'équation $E(m)$ à l'équation $E(1-m)$ en multipliant les intégrales par

$$(\alpha-\beta)^{2m-1}.$$

Si on désigne, d'une manière générale, par V_m une intégrale quelconque de l'équation $E(m)$, on peut écrire

$$V_{1-m}=(\alpha-\beta)^{2m-1}V_m. \tag{18}$$

Je dirai que deux équations $E(m)$ et $E(m')$ sont *contigües* quand elles correspondent à des valeurs de m qui diffèrent d'une unité; les surfaces Σ correspondantes seront dites aussi contigües. A une série de surfaces Σ_m ou Σ_{1-m} correspondent deux séries de surfaces contigües Σ_{m+1} ou Σ_{-m}, et Σ_{m-1} ou Σ_{2-m}. Je supposerai dans ce qui suit que les valeurs de m, racines de l'équation (14), sont réelles, c'est-à-dire que la constante K est supérieure à $-\frac{9}{8}$. On pourra même supposer, si l'on veut, que la valeur de m est supérieure à $\frac{1}{2}$.

6. Laissant de côté ces généralités, je considère maintenant le cas où l'équation (12) peut être intégrée par la méthode de Laplace; pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que m soit un nombre entier*. On a donc une suite illimitée de cas d'intégrabilité. Puisque les valeurs m et $1-m$ ne donnent pas des surfaces différentes. on pourrait se borner à prendre les valeurs positives de m; mais il vaut mieux, pour la suite, considérer la suite des valeurs entières, tant négatives que positives, de m avec la suite des valeurs correspondantes de K

m	-5,	-4,	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6, ... ,
K	14,	9,	5,	2,	0,	-1,	-1,	0,	2,	5,	9,	14, ...

Chaque valeur de K se présente deux fois dans cette suite. Ainsi pour $m=0$ et $m=1$, on a $K=-1$, et on obtient les surfaces étudiées par M. Appell dans le

travail cité plus haut. Pour $m = 2$, et $m = -1$, on retrouve les surfaces minima. Pour $m = 3$, et $m = -2$, on a $K = 2$; les surfaces obtenues sont telles que la somme des rayons de courbure principaux est égale à quatre fois la distance de l'origine au plan tangent, et ainsi de suite.

Il nous reste à montrer comment on peut dans ce cas obtenir effectivement l'intégrale générale de l'équation (12) et par suite de l'équation (9). On peut évidemment supposer pour cela que m est un entier positif. En différentiant le premier membre de l'équation (12) par rapport à α et à β successivement, et en posant

$$W = \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta},$$

on trouve que W vérifie l'équation

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\partial\beta} - (m+1)\frac{\partial W}{\partial\alpha} + (m+1)\frac{\partial W}{\partial\beta} = 0, \tag{19}$$

qui n'est autre que l'équation $E(m+1)$. Si donc V_m désigne une intégrale de l'équation $E(m)$, la fonction

$$V_{m+1} = \frac{\partial^2 V_m}{\partial\alpha\partial\beta}, \tag{20}$$

sera une intégrale de l'équation $E(m+1)$. Mais il n'en résulte pas qu'en prenant pour V_m l'intégrale générale de l'équation $E(m)$ on obtienne de cette façon l'intégrale générale de l'équation $E(m+1)$. Pour examiner ce point essentiel, je considère l'équation intermédiaire qui est satisfaite par la fonction $v_1 = \frac{\partial v}{\partial\alpha}$,

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha\partial\beta} - m\frac{\partial v_1}{\partial\alpha} + (m+1)\frac{\partial v_1}{\partial\beta} = 0. \tag{21}$$

Soit v_1 une intégrale quelconque de l'équation (21); cherchons s'il existe une intégrale de l'équation (12) telle que l'on ait

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha} = v_1.$$

L'équation (12) peut alors s'écrire

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial v_1}{\partial\beta} - mv_1 + m\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,$$

et on en tirera $\frac{\partial v}{\partial\beta}$, pourvu que m ne soit pas nul. Les valeurs de $\frac{\partial v}{\partial\alpha}$ et de $\frac{\partial v}{\partial\beta}$ ainsi obtenues satisfont à la condition d'intégrabilité, d'après l'équation (21). Par conséquent, si m n'est pas nul, on obtient l'intégrale générale de l'équation

(21) en prenant $v_1 = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$, v désignant l'intégrale générale de l'équation (12). On démontrera de la même manière que la formule

$$W = \frac{\partial v_1}{\partial \beta},$$

où v_1 désigne l'intégrale générale de l'équation (21), représente l'intégrale générale de l'équation (19), pourvu que m ne soit pas nul. Ainsi, tant que m est différent de zéro, la formule (20) permet de déduire l'intégrale générale de l'équation $E(m+1)$ de l'intégrale générale de l'équation $E(m)$.

Si nous supposons que m soit un nombre entier positif, l'application répétée de la formule (20) nous donne pour l'intégrale générale de l'équation $E(m)$

$$V_m = \frac{\partial^{2m-2} V_1}{\partial \alpha^{m-1} \partial \beta^{m-1}}, \tag{22}$$

V_1 désignant l'intégrale générale de l'équation $E(1)$. Or cette équation $E(1)$ s'intégre immédiatement, car on peut l'écrire

$$\frac{\partial^2 [(\alpha - \beta) v]}{\partial \alpha \partial \beta} = 0;$$

on en tire

$$V_1 = \frac{f(\alpha) - \varphi(\beta)}{\alpha - \beta},$$

$f(\alpha)$ désignant une fonction quelconque de α et $\phi(\beta)$ une fonction quelconque de β, et par suite

$$V_m = \frac{\partial^{2m-2}\left[\frac{f(\alpha) - \varphi(\beta)}{\alpha - \beta}\right]}{\partial \alpha^{m-1} \partial \beta^{m-1}}. \tag{23}$$

Si dans cette formule on fait maintenant le changement de variables (13), on obtiendra, pour représenter l'intégrale générale de l'équation (9), une formule où les variables s, s_0 n'entreront pas symétriquement. Pour éviter cet inconvénient, on pourra opérer comme il suit. Dans la formule générale (23) prenons la partie qui contient la fonction arbitraire de α

$$V_m = \frac{\partial^{2m-2}\left[\frac{f(\alpha)}{\alpha - \beta}\right]}{\partial \alpha^{m-1} \partial \beta^{m-1}},$$

et faisons dans cette partie le changement de variables. Nous obtenons ainsi une intégrale de l'équation (9) de la forme

$$u = Af^{m-1}(s) + Bf^{m-2}(s) + \dots + Lf(s), \tag{24}$$

$A, B, C, \ldots . L$ désignant des fonctions déterminées de s et de s_0, $f(s)$ une fonction arbitraire de s, et $f'(s), \ldots . f^{m-1}(s)$ ses dérivées. Désignons par $A_0, B_0, C_0, \ldots . L_0$ ce que deviennent les fonctions $A, B, C, \ldots . L$ quand on y permute les lettres s et s_0, par $f_0(s)$ une fonction arbitraire de s_0. L'intégrale générale de l'équation (9) sera alors

$$\left. \begin{aligned} u = & A f^{m-1}(s) + B f^{m-2}(s) + \ldots . + L f(s) \\ & + A_0 f_0^{m-1}(s_0) + B_0 f_0^{m-2}(s_0) + \ldots . + L_0 f_0(s_0), \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

et, pour obtenir des surfaces réelles, il suffira de prendre pour f et f_0 des fonctions conjuguées. Si on porte ensuite cette valeur de u dans les formules (5), on aura les coordonnées d'un point de la surface exprimées en fonction des deux paramètres variables s, s_0.

Appliquons cette méthode aux cas les plus simples:

$K = -1$, $m = 1$, $m = 0$, *Surfaces* Σ_0 *ou* Σ_1 *de M. Appell*:

$$u = (1 + ss_0)[f(s) + f_0(s_0)];$$

$K = 0$, $m = 2$, $m = -1$, *Surfaces minima ou surfaces* Σ_2 *et* Σ_{-1}:

$$u = (1 + ss_0)[f'(s) + f_0'(s_0)] - 2s_0 f(s) - 2s f_0(s_0);$$

$K = 2$, $m = 3$, $m = -2$, *Surfaces* Σ_3 *ou* Σ_{-2}:

$$u = (1 + ss_0)[f''(s) + f_0''(s_0)] - 6\,[s f_0'(s_0) + s_0 f'(s)] + 12\,\frac{s^2 f_0(s_0) + s_0^2 f(s)}{1 + ss_0}.$$

On peut remarquer que le coefficient A de la plus haute dérivée de la fonction arbitraire est toujours égal à $1 + ss_0$. Il ne serait pas difficile d'ailleurs de former l'expression générale des coefficients $A, B, C, \ldots . L$, mais la formule générale ainsi obtenue paraît compliquée.

Supposons, par exemple, que dans la dernière des formules précédentes on prenne $f = f_0 = 1$; on aura pour u, en négligeant un facteur constant,

$$u = \frac{s^2 + s_0^2}{1 + ss_0}.$$

Les équations différentielles des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de la surface obtenue seront respectivement

$$\begin{gathered} (1 + s_0^4)\, ds^2 = (1 + s^4)\, ds_0^2, \\ (1 + s_0^4)\, ds^2 + (1 + s^4)\, ds_0^2 - 4\,(s^2 + s_0^2)\, ds\, ds_0 = 0; \end{gathered}$$

on voit que la recherche des lignes de courbure se ramène à l'intégration de l'équation d'Euler. Ces lignes seront par conséquent algébriques.

7. Dans le Mémoire déjà cité plusieurs fois, M. Appell a rattaché d'une façon très remarquable les surfaces Σ_0 ou Σ_1 aux surfaces minima. Etant donnée en général une de nos surfaces Σ, correspondant à une valeur quelconque de m, nous allons voir qu'on peut en déduire deux surfaces contigües par une construction géométrique, qui comprend comme cas particulier la construction donnée par M. Appell. Voici comment on est conduit à ce résultat; nous avons vu qu'en désignant par V_m l'intégrale générale de l'équation $E(m)$, l'intégrale générale de l'équation $E(m+1)$ était donnée par la formule

$$V_{m+1} = \frac{\partial^2 V_m}{\partial\alpha\partial\beta},$$

sauf le cas où m était nul; mais si l'on écrit la relation précédente

$$V_{m+1} = \frac{\dfrac{\partial V_m}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial V_m}{\partial\beta}}{\alpha-\beta}, \tag{26}$$

on reconnaît immédiatement qu'elle s'applique encore lorsque $m=0$. On peut remarquer que les formules (18) et (26) permettent de ramener l'intégration de l'équation générale $E(m)$ au cas où m est compris entre 0 et 1.

Cela posé, soit v une intégrale quelconque de l'équation (12) et u l'intégrale de l'équation (9) qui lui correspond par le changement de variables défini par les formules (13). Au moyen de la formule (26) on déduira de v une intégrale v_1 de l'équation contigüe, puis une fonction u_1 qui vérifiera une nouvelle équation analogue à l'équation (9). En transformant convenablement la relation qui permet de déduire u_1 de u par le procédé qui nous a déjà servi plusieurs fois, on arrive à définir une construction géométrique analogue à celle de M. Appell. Mais on peut supprimer ces intermédiaires et partir directement de l'équation (9).

De l'équation (9)

$$(1+ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_0} - s\frac{\partial u}{\partial s} - s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} + \left[1+\frac{2K}{1+ss_0}\right]u = 0 \tag{9}$$

on tire, en différentiant le premier membre par rapport à l'une quelconque des variables,

$$\left.\begin{aligned}(1+ss_0)\frac{\partial^3 u}{\partial s\partial^2 s_0} &= s\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{2K}{1+ss_0}\left[\frac{s_0 u}{1+ss_0} - \frac{\partial u}{\partial s}\right],\\ (1+ss_0)\frac{\partial^3 u}{\partial s\partial s_0^2} &= s_0\frac{\partial^2 u}{\partial s_0^2} + \frac{2K}{1+ss_0}\left[\frac{su}{1+ss_0} - \frac{\partial u}{\partial s_0}\right].\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Posons

$$U = u - s\frac{\partial u}{\partial s} - s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} + \lambda\frac{ss_0-1}{1+ss_0}u, \tag{28}$$

λ désignant une constante quelconque. A l'aide des relations (9) et (27) on vérifie sans difficulté que la fonction U satisfait à l'équation suivante

$$\left.\begin{aligned}(1+ss_0)\frac{\partial^2 U}{\partial s\partial s_0}-s\frac{\partial U}{\partial s}-s_0\frac{\partial U}{\partial s_0}+\frac{ss_0+1+2(K+\lambda-1)}{1+ss_0}U \\ =\frac{2(ss_0-1)}{(1+ss_0)^2}[\lambda^2-3\lambda-2K]u;\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

si on prend pour λ une racine de l'équation (11) déjà obtenue

$$\lambda^2-3\lambda-2K=0,$$

on voit que la fonction U satisfait à une équation de même forme que l'équation (9)

$$(1+ss_0)\frac{\partial^2 U}{\partial s\partial s_0}-s\frac{\partial U}{\partial s}-s_0\frac{\partial U}{\partial s_0}+\frac{ss_0+1+2(K+\lambda-1)}{1+ss_0}U=0, \tag{30}$$

qui se déduit de l'équation (9) en remplaçant K par $K+\lambda-1$.

Soient λ', λ'' les deux racines de l'équation (11), que je suppose réelles et distinctes, et m', m'' les valeurs correspondantes de m,

$$m'=\lambda'-1,\ m''=\lambda''-1,\ m'+m''=1;$$

changer K en $K+\lambda'-1$, cela revient, d'après la relation (14), à remplacer m' par $m'+1$, et de même changer K en $K+\lambda''-1$ revient à remplacer m'' par $m''+1$. Par conséquent, si la fonction u d'où l'on est parti définit une surface Σ_m, les deux fonctions U que l'on vient d'obtenir définiront respectivement une surface Σ_{m+1} et une surface Σ_{m-1}. Pour avoir la signification géométrique de la formule (28) écrivons la comme il suit:

$$\frac{U}{1+ss_0}=\frac{u-s\dfrac{\partial u}{\partial s}-s_0\dfrac{\partial u}{\partial s_0}}{1+ss_0}+\lambda\frac{ss_0-1}{1+ss_0}\cdot\frac{u}{1+ss_0},$$

λ ayant une des deux valeurs $m+1$, $2-m$, et reportons-nous aux formules (3), (4), (5). L'expression

$$\frac{s\dfrac{\partial u}{\partial s}+s_0\dfrac{\partial u}{\partial s_0}-u}{1+ss_0}$$

représente la coordonnée z du point de la surface où le plan tangent coïncide

avec le plan (4), $\frac{ss_0 - 1}{1 + ss_0}$ est égal au cosinus de l'angle que fait la normale en ce point avec l'axe Oz; enfin

$$\frac{u}{1 + ss_0}, \frac{U}{1 + ss_0}$$

sont les distances de l'origine aux deux plans considérés. On a donc la construction suivante: *Soit Σ_m une quelconque de nos surfaces, P un plan tangent à cette surface et M le point de contact. Menons un plan parallèle P_1 à une distance de l'origine égale à la distance du point M au plan xOy, diminuée de la projection sur l'axe Oz de la distance de l'origine au plan P multipliée par le facteur constant $\frac{3}{2} \pm \left(m - \frac{1}{2}\right)$, ce plan P_1 enveloppera une surface Σ_{m+1}, ou une surface Σ_{m-1}.*

Si on suppose $m = 2$, ou $m = -1$, une des valeurs de λ sera nulle, la construction se simplifie, et on retrouve la construction de M. Appell pour passer d'une surface minima à une surface Σ_0 ou Σ_1. C'est d'ailleurs le seul cas où la construction se simplifie.

Réciproquement, on obtient *toutes* les surfaces Σ_{m+1}, ainsi que *toutes* les surfaces Σ_{m-1}, en appliquant la construction qui précède à toutes les surfaces Σ_m. Il suffit évidemment de le démontrer pour les surfaces Σ_{m+1}, par exemple. Soit U une intégrale de l'équation (30); il nous faut examiner si on peut trouver une fonction u vérifiant à la fois les équations (9) et (28). Ces équations peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} s\frac{\partial u}{\partial s} + s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} &= u + \lambda\frac{ss_0 - 1}{1 + ss_0}u - U, \\ (1 + ss_0)\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} &= \frac{\lambda(ss_0 - 1) - 2K}{1 + ss_0}u - U. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

De l'équation (28) on tire en différentiant

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -s\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - s_0\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} + \lambda\frac{ss_0 - 1}{1 + ss_0}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{2\lambda s_0 u}{(1 + ss_0)^2},$$

et on déduit de ces équations les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0}$ en fonction de u, U, s, s_0, $\frac{\partial u}{\partial s}$

$$\frac{\partial u}{\partial s_0} = \varphi\left(u, U, s, s_0, \frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_0} = \psi\left(u, U, s, s_0, \frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \pi\left(u, U, s, s_0, \frac{\partial u}{\partial s}\right),$$

et, en posant $\frac{\partial u}{\partial s} = \zeta$, u et ζ seront déterminées par un système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{cases} du = \zeta ds + \phi(u, U, s, s_0, \zeta)\, ds_0, \\ d\zeta = \pi(u, U, s, s_0, \zeta)\, ds + \psi(u, U, s, s_0, \zeta)\, ds_0, \end{cases}$$

et, la fonction U étant supposée vérifier l'équation (30), les conditions d'intégrabilité seront satisfaites.

8. Si on applique aux surfaces Σ_{m+1} les deux constructions précédentes, en remplaçant m par $m+1$, on obtiendra les surfaces Σ_m et les surfaces Σ_{m+2}. On peut donc déduire les surfaces Σ_m des surfaces Σ_{m+1}, comme on déduit les surfaces Σ_{m+1} des surfaces Σ_m. Mais il est à remarquer qu'il n'y a pas réciprocité entre ces surfaces prises individuellement. Etant donnée une surface particulière Σ_m, la construction précédente appliquée à cette surface donne une surface bien déterminée Σ_{m+1}, et une nouvelle construction appliquée à Σ_{m+1} donnera une nouvelle surface Σ'_m qui sera en général différente de Σ_m. On le vérifiera plus loin sur des exemples.

On voit maintenant comment on pourra faire dériver, par des constructions géométriques successives, toutes nos surfaces Σ_m des surfaces pour lesquelles l'indice m est compris entre zéro et l'unité. On pourra même, en remarquant que les surfaces Σ_m et Σ_{1-m} sont identiques, diminuer cet intervalle de moitié.

Considérons en particulier les surfaces dont l'indice est un nombre entier. Attribuons à la constante m toutes les valeurs entières, tant négatives que positives; on a vu que chaque série de surfaces se présentait deux fois, pour les valeurs $1-m$ et m de l'indice. On peut alors se borner à considérer les constructions qui permettent de passer d'une série de surfaces à la série suivante. Chaque série de surfaces se déduira de la précédente par une construction bien déterminée et on peut faire dériver toutes ces surfaces d'une seule série, par exemple des surfaces minima.

Prenons en particulier les surfaces Σ_0 ou Σ_1; la valeur générale de u est, comme on l'a vu plus haut,

$$u = (1 + ss_0)[f(s) + f_0(s_0)];$$

l'équation (11) est ici

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Si on prend $\lambda = 1$, on trouve

$$U = -(1 + ss_0)[sf'(s) + s_0 f_0'(s_0)],$$

qui convient encore aux surfaces Σ_0; on s'explique aisément ce fait en remarquant que ces surfaces sont contigües à elles-mêmes. Si on prend ensuite $\lambda = 2$, on trouve

$$U = 2s_0 s f(s) + 2ss_0 f_0(s_0) - (1 + ss_0)[f(s) + sf'(s) + s_0 f_0'(s_0) + f_0(s_0)];$$

c'est, avec un changement de notations, la valeur générale de u qui convient aux surfaces minima. Prenons encore les surfaces minima; la valeur générale de u est de la forme

$$u = 2sf_0(s_0) + 2s_0 f(s) - (1 + ss_0)[f'(s) + f_0'(s_0)].$$

L'équation en λ est ici $\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Pour $\lambda = 0$, on a

$$U = (1 + ss_0)[sf''(s) - f'(s) + s_0 f_0''(s_0) - f_0'(s_0)];$$

c'est la forme qui convient aux surfaces Σ_0. Pour $\lambda = 3$, on trouve

$$U = (1 + ss_0)[sf''(s) + 2f'(s) + s_0 f_0''(s_0) + 2f_0'(s_0)] - 6s_0[sf'(s) + f(s)]$$
$$- 6s[s_0 f_0'(s_0) + f_0(s_0)] + \frac{12ss_0}{1 + ss_0}[s_0 f(s) + sf_0(s_0)].$$

Cette valeur de U peut s'écrire, en posant $sf(s) = \phi(s)$, $s_0 f_0(s_0) = \phi_0(s_0)$,

$$U = (1 + ss_0)[\phi''(s) + \phi_0''(s_0)] - 6[s\phi_0'(s_0) + s_0\phi'(s)] + 12\frac{s^2\Phi_0(s_0) + s_0^2\Phi(s)}{1 + ss_0};$$

c'est précisément la valeur générale de u trouvée plus haut qui convient aux surfaces Σ_3.

9. Etant données une courbe gauche analytique C et une développable Δ passant par cette courbe, il existe en général une surface minima et une seule tangente à la développable Δ le long de la courbe C; les coordonnées d'un point de cette surface peuvent être exprimées en fonction de deux paramètres par des formules ne renfermant que des quadratures. Cette importante question a été, comme on sait, posée et résolue pour la première fois par E. G. Bjorling.* M. Appell a résolu le même problème pour les surfaces Σ_0.† Au moyen d'un très-beau résultat dû à Riemann, on peut traiter la même question pour une surface quelconque satisfaisant à l'équation (9), quelle que soit la valeur de la constante K.

Imaginons que par l'origine on mène des perpendiculaires à tous les plans

---

* *Archives de Grunert*, t. IV, p. 290 ; 1844.

† *Mémoire sur les déblais et les remblais.* Voyez *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXIX, No. 3, p. 137.

tangents de la développable Δ; ces droites forment un cône, qui coupe la sphère S de rayon égal à l'unité suivant une certaine courbe c, qui sera définie par une relation de la forme

$$\phi(s, s_0) = 0;$$

la développable Δ étant donnée, la fonction cherchée u prendra des valeurs connues pour les systèmes de valeurs de s et de s_0 qui vérifient la relation précédente. D'un autre côté, la courbe C étant donnée, on connaîtra aussi la valeur de z pour ces systèmes de valeurs de s et de s_0, c'est-à-dire qu'on connaîtra, le long de la courbe c, la fonction

$$s\frac{\partial u}{\partial s} + s_0\frac{\partial u}{\partial s_0} - u.$$

Cette relation, jointe à la relation

$$du = \frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial s_0}ds_0,$$

nous fera connaître les valeurs des dérivées partielles de la fonction inconnue $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s_0}$, le long de c, à moins que l'on ait

$$sds_0 - s_0ds = 0.$$

Je laisse de côté ce cas singulier, qui ne se présentera pas si la courbe C et la développable Δ sont réelles. Le problème de Géométrie posé plus haut est donc ramené au problème d'Analyse suivant :

Déterminer une fonction u satisfaisant à l'equation (9) *et prenant, ainsi que ses dérivées premières $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s_0}$, des valeurs données à l'avance le long d'une courbe c représentée par l'équation*

$$\phi(s, s_0) = 0.$$

Il suffit d'ailleurs de se donner l'une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s_0}$, car la relation écrite plus haut

$$du = \frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial s_0}ds_0,$$

appliquée à un déplacement le long de cette courbe, fera connaître celle des deux dérivées partielles qui n'est pas donnée *a priori*. Au moyen des formules (13), ce problème se ramène lui-même au problème analogue relatif à l'équation (12), car la relation $\phi(s, s_0) = 0$ se change en une certaine relation

$$\psi(\alpha, \beta) = 0;$$

et, si la fonction u et ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à s

et à s_0 sont supposées connues pour tous les systêmes de valeurs de s et de s_0 vérifiant l'équation $\phi(s, s_0) = 0$, il en sera évidemment de même de la fonction v et de ses dérivées partielles prises par rapport à α et à β pour tous les systêmes de valeurs de α et de β vérifiant la relation nouvelle $\psi(\alpha, \beta) = 0$.

Ce dernier problème se trouve résolu, sous une forme un peu différente, dans le Mémoire déjà cité de Riemann (*Gesammelte Werke*, p. 145). Le grand géomètre établit que l'on peut obtenir la fonction v, satisfaisant aux conditions précédentes, par des quadratures seulement.

PARIS, Janvier 1888.